

TD3. Anneaux et Corps**Exercice 1.**

Un élément x d'un anneau A est dit nilpotent s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$. On suppose que A est commutatif, et on fixe x, y deux éléments nilpotents.

- (1) Montrer que $x + y$ est nilpotent.
- (2) Montrer que $1_A - x$ est inversible.
- (3) Soient $u, v \in A$ avec A supposé non commutatif et tel que uv est nilpotent. Montrer que vu est nilpotent.

Exercice 2.

Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A .

- (1) Montrer que $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \geq 1, x^n \in I\}$ est un idéal de A .
- (2) Un idéal I d'un anneau commutatif A est dit *primaire* si et seulement si

$$\forall (x, y) \in A^2, xy \in I \text{ et } x \notin I \implies y \in \sqrt{I}.$$

- (a) Montrer que I est primaire si et seulement si les diviseurs de zéros de A/I sont nilpotents.
- (b) Montrer que si I est un idéal premier alors I est primaire.
- (c) Montrer que si I est un idéal primaire alors $\sqrt{I}$ est premier.
- (3) Déterminer $\sqrt{k\mathbb{Z}}$ pour $k \geq 1$.

Exercice 3.

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ et on définit la *norme* N par $N(z) = z\bar{z}$.

- (1) Montrer que $N(zz') = N(z)N(z')$.
- (2) Montrer que $N(z) = 1 \iff z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]^\times$.
- (3) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 5)$.
- (4) Déterminer $\text{Frac}(\mathbb{Z}[i\sqrt{5}])$.

Exercice 4.

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

- (1) Déterminer $\mathbb{Z}[i]^\times$
- (2) On considère l'application $f : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, a + ib \mapsto \overline{a + 7b}$.
 - (a) Montrer que f est un morphisme d'anneaux surjectif.
 - (b) Déterminer le noyau $\ker f$.
 - (c) En déduire que $\mathbb{Z}[i]/\ker f \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
 - (d) L'idéal $(3 + i)$ est-il premier dans $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 5.

On considère $\mathbb{Z}[i] = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

- (1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
- (2) On considère la norme $N(z) = |z|^2$ pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$.

- (a) Montrer que $N(z) \in \mathbb{N}$.
 - (b) Montrer que $z \in (\mathbb{Z}[i])^\times \iff N(z) = 1$.
 - (c) Déterminer $(\mathbb{Z}[i])^\times$.
- (3) On considère une application $f: \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$.
- (a) Déterminer $f(a + ib)$ sachant que f est un morphisme d'anneaux dont le noyau est $(7 + i)$, l'idéal engendré par $7 + i$. Justifier la réponse.
 - (b) Montrer qu'un tel morphisme f permet d'établir que $\mathbb{Z}[i]/(7 + i)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$.